Программа курса **Методы оптимизации**
(5–6 семестры, 2019/2020 уч. год) лектор – профессор М.М.Потапов

1. Метрический вариант теоремы Вейерштрасса для полунепрерывных снизу функционалов. Недостаточность условий ограниченности и замкнутости множества в бесконечномерном пространстве.

2. Вариант теоремы Вейерштрасса для слабо полунепрерывных снизу функционалов. Достаточные условия слабой полунепрерывности снизу и слабой компактности. Соотношения между свойствами компактности и слабой компактности, полунепрерывности и слабой полунепрерывности.

3. Слабая полунепрерывность снизу квадратичного функционала. Слабая компактность невырожденного эллипсоида в гильбертовом пространстве и "параллелепипеда" в пространстве $L^2(a, b)$.

4. Существование оптимального управления в линейной динамической системе с *терминальным* и *интегральным* квадратичными функционалами.

5. Элементы дифференциального исчисления в нормированных пространствах. Первая и вторая производные квадратичного функционала. Теорема о производной сложной функции. Формула конечных приращений.

6. Первые производные *терминального* и *интегрального* квадратичных функционалов на решениях линейной динамической системы.

7. Первые производные квадратичных функционалов на решениях линейной дискретной системы.

8. Первые производные *терминального* и *интегрального* квадратичных функционалов на решениях уравнения теплопроводности.

9. Выпуклые функции. Теорема о локальном минимуме. Критерии выпуклости для функций, имеющих первые и вторые производные.

10. Сильно выпуклые функции. Критерии сильной выпуклости для функций, имеющих первые и вторые производные. Условия сильной выпуклости квадратичного функционала.

11. Вариант теоремы Вейерштрасса для сильно выпуклых функционалов. Условие оптимальности для дифференцируемого функционала в форме вариационного неравенства.

12. Проекция точки на множество. Существование и единственность проекции на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Характеризация проекции вариационным неравенством. Свойство нестрогой сжимаемости оператора проектирования. Проекционная форма критерия оптимальности.

13. Метод скорейшего спуска. Оценка скорости сходимости для сильно выпуклых функций.

14. Явные расчетные формулы для шага метода скорейшего спуска в случае квадратичных функционалов. Непрерывный аналог метода и оценка скорости его сходимости для сильно выпуклых функций.

15. Метод проекции градиента. Оценка скорости сходимости метода проекции градиента с постоянным шагом для сильно выпуклых функций. Непрерывный аналог метода.

16. Метод условного градиента. Оценка скорости сходимости для сильно выпуклых функций.

17. Классический метод Ньютона с шагом $\alpha_k = 1$. Оценка скорости локальной сходимости для сильно выпуклых функций. Глобально сходящийся вариант метода с регулировкой шага α_k.

18. Метод сопряженных направлений в R^n для квадратичных сильно выпуклых функционалов; сходимость за конечное число шагов. Реализация метода в случае функционалов общего вида.

19. Метод покоординатного спуска в R^n. Сходимость для выпуклых дифференцируемых функций. Существенность условия дифференцируемости.

20. Каноническая задача линейного программирования; ее эквивалентность общей задаче линейного программирования. Критерий угловой точки для канонической задачи.

21. Симплекс-метод для канонической задачи линейного программирования.

22. Метод штрафных функций для задач минимизации с ограничениями вида

$$u \in U_0 \subset H;\ \ g_1(u) \le 0, ..., g_m(u) \le 0,\ g_{m+1}(u) = 0, ..., g_{m+s}(u) = 0.$$

Сходимость для слабо полунепрерывных снизу функционалов.

23. Правило множителей Лагранжа для выпуклых задач минимизации с ограничениями вида

$$u \in U_0, \quad g_1(u) \le 0, ..., g_m(u) \le 0.$$

Достаточное условие регулярности Слейтера.

24. Теорема Куна-Таккера о седловой точке функции Лагранжа для выпуклых задач минимизации с ограничениями вида

$$u \in U_0, \quad g_1(u) \le 0, ..., g_m(u) \le 0.$$

Пример нерегулярной задачи.

25. Правило множителей Лагранжа для гладких задач минимизации с ограничениями вида

$$g_1(u) \le 0, ..., g_m(u) \le 0, \quad G(u) = (g_{m+1}(u), ..., g_{m+s}(u)) = 0.$$

Достаточные условия регулярности.

26. Условия, при которых *необходимые* для оптимальности соотношения в форме правила множителей Лагранжа в гладких задачах минимизации с ограничениями вида

$$g_1(u) \le 0, ..., g_m(u) \le 0, \quad G(u) = (g_{m+1}(u), ..., g_{m+s}(u)) = 0,$$

оказываются *достаточными* для оптимальности. Теорема Люстерника.

27. Двойственные экстремальные задачи. Теорема о свойствах решений двойственных задач и примеры к этой теореме.

28. Простейшая нелинейная задача оптимального управления со свободным правым концом. Формула приращения функционала с оценкой остаточных членов в $L^1(t_0, T)$. Принцип максимума Понтрягина.

29. Простейшая нелинейная задача оптимального управления со свободным правым концом. Формула приращения функционала с оценкой остаточных членов в $L^2(t_0, T)$. Градиент функционала. Линеаризованный принцип максимума.

30. Некорректно поставленные задачи минимизации. Метод регуляризации Тихонова.

ЛИТЕРАТУРА

1.[В1] Васильев Ф.П. Методы оптимизации: В 2-х кн. М., МЦНМО, 2011 (Факториал Пресс, 2002).

2.[В2] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М., Наука, 1988 (1980).

3.[В3] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М., Наука, 1981.

4.[СТФ] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М., Физматлит, 2005 (Наука, 1986).

5.[КФ] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976.

6.[АТФ] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Физматлит, 2005 (Наука, 1979).